PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA SIMPLE EN ESTÁTICA, UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL: NIVEL INTERMEDIO.

Problema 4.

Se tiene un toroide de N vueltas y sección rectangular, de radio interno a, radio externo b y altura c, excitado con una corriente I_0, como se muestra en la figura 1.

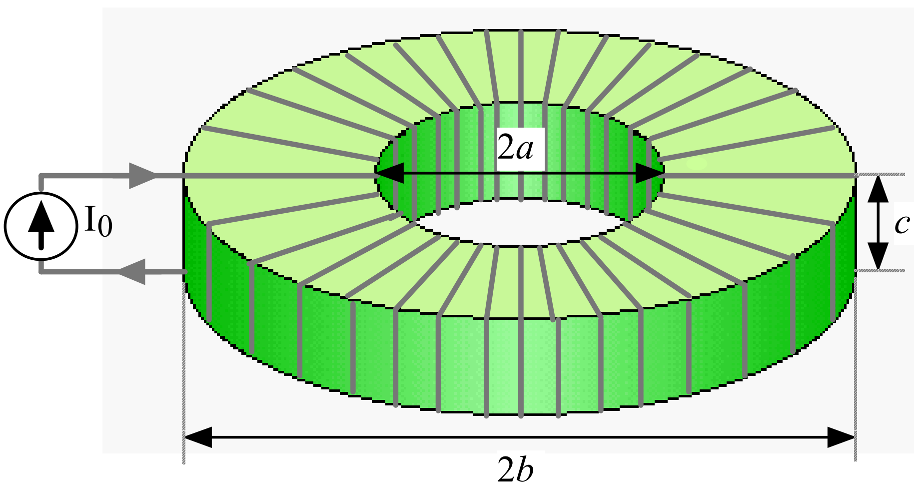

Fig. 1: Toroide del problema 4.

a) Suponiendo que $N >> 1$ y que el arrollado es uniforme, la corriente en cada superficie del toroide puede modelarse como una densidad de corriente superficial. Determinar la densidad de corriente superficial de cada cara del toroide.

b) Explicar brevemente por qué el campo magnético dentro del toroide es de la forma $\overline{H}(\rho) = \overline{1_\varphi}\, H_\varphi(\rho)$.

c) Determinar el campo magnético dentro del toroide.

Solución

a) Densidad de corriente superficial en cada cara del toroide.

Para determinar la densidad de corriente superficial, se usa la condición de frontera de la Ley de la Conservación de la carga en estática:

$$\overline{1n} \cdot \left[\overline{J}\Big|_{S^+} - \overline{J}\Big|_{S^-} \right] = -\nabla_S \cdot \overline{K}$$

Como no hay corrientes volumétricas en el sistema, esta condición se reduce a:

$$\nabla_S \cdot \overline{K} = 0$$

En la superficie $z = c$ (cara superior del toroide), la densidad superficial de corriente es radial. Entonces:

$$\nabla_S \cdot \overline{K} = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho K_\rho \right)}{\partial \rho} \Rightarrow \rho K_\rho = C_1 \Rightarrow K_\rho = \frac{C_1}{\rho}$$

Para determinar el valor de la constante, debe tomarse en cuenta que la corriente total que atraviesa cada cara del toroide es NI_0. El flujo de $\overline{K}$ entrando al contorno en azul de la figura 2 de la siguiente página es NI_0, por lo que:

$$\oint_L \overline{K} \cdot \left(-\overline{1\rho} \right) dl_\varphi = NI_0 = -\int_0^{2\pi} \frac{C_1}{\rho} \rho \, d\varphi = -2\pi C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{NI_0}{2\pi} \Rightarrow K_\rho = -\frac{NI_0}{2\pi \rho}$$

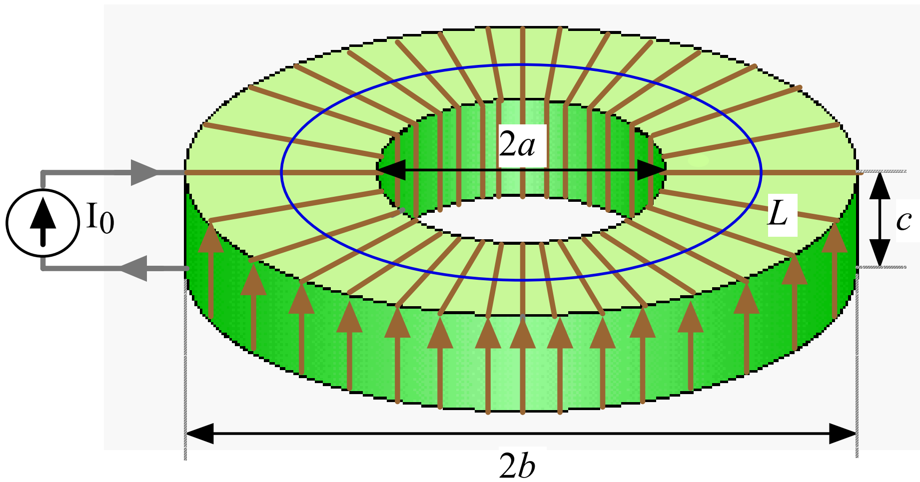

Fig. 2: Contorno para el cálculo de la constante de la densidad de corriente superficial en z=c . Las líneas de flujo de la densidad de corriente se muestran en color marrón.

En la superficie $z = 0$ (cara inferior del toroide), se tiene la misma densidad de $z = c$ pero con sentido opuesto.

En la superficie $\rho = a$ (cara interna del toroide), se tiene que $\overline{K} = K_z \overline{1z}$. Al aplicar allí la condición de frontera de la Ley de la conservación de la carga, se tiene:

$$\nabla_S \cdot \overline{K} = 0 = \frac{\partial K_z}{\partial z} \Rightarrow K_z = C_2$$

Para determinar la constante se calcula el flujo de $\overline{K} = K_z \overline{1z}$ a través del contorno de una circunferencia sobre la pared interna del toroide:

$$\oint_L \overline{K} \cdot \left(-\overline{1z}\right) dl_\varphi = NI_0 = -\int_0^{2\pi} C_2 a \, d\varphi = -2\pi \, a \, C_2 \Rightarrow C_2 = K_z = -\frac{NI_0}{2\pi \, a}$$

Mediante un razonamiento similar, se concluye que en la superficie ρ=b (cara externa del toroide), se tiene que también $\overline{K} = K_z \overline{1z}$, y que $K_z = C_3$. La constante se obtiene calculando el flujo de $\overline{K} = K_z \overline{1z}$ a través del contorno de una circunferencia sobre la pared externa del toroide:

$$\oint_L \overline{K} \cdot \left(\overline{1z}\right) dl_\varphi = NI_0 = \int_0^{2\pi} C_3 b \, d\varphi = 2\pi \, b \, C_3 \Rightarrow C_3 = K_z = \frac{NI_0}{2\pi \, b}$$

En resumen, las densidades de corriente superficial del problema son:

$$\overline{K} = \begin{cases} -\overline{1\rho} \dfrac{NI_0}{2\pi\rho}, \text{ en } a < \rho < b, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; z = c \\ -\overline{1z} \dfrac{NI_0}{2\pi a}, \text{ en } \rho = a, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; 0 < z < c \\ \overline{1\rho} \dfrac{NI_0}{2\pi\rho}, \text{ en } a < \rho < b, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; z = 0 \\ \overline{1z} \dfrac{NI_0}{2\pi b}, \text{ en } \rho = b, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \; 0 < z < c \end{cases}$$

b) Forma del campo dentro del toroide.

El campo magnético dentro del toroide no depende de la coordenada φ porque el sistema es simétrico respecto a esa coordenada, y las densidades de corriente no dependen de dicha coordenada. Tampoco depende de la coordenada z porque en cualquier valor de z comprendido entre 0 y c se tiene la misma geometría de corrientes, y porque las densidades de corriente no dependen de z.

El campo magnético dentro del toroide sí depende de la coordenada radial porque las densidades de corriente en las caras superior e inferior del toroide dependen de esa coordenada.

Dado que las densidades de corriente tienen componente z ó componente ρ, el campo magnético dentro del toroide no puede tener dichas componentes, por regla de la mano derecha. En resumen, el campo magnético dentro del toroide es de la forma $\overline{H}(\rho) = \overline{1\varphi}\, H_\varphi(\rho)$.

c) Cálculo del campo dentro del toroide.

La Ley de Ampère en forma diferencial establece que:

$$\nabla \times \overline{H}(\bar{r}) = \overline{J}(\bar{r})$$

En este problema no hay corrientes volumétricas dentro del toroide. Tomando en cuenta además la forma del campo, se tiene:

$$\nabla \times \overline{H}(\rho) = \overline{1z}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho H_\varphi\right)}{\partial \rho} = \bar{0} \Rightarrow \rho H_\varphi = C_1 \Rightarrow H_\varphi = \frac{C_1}{\rho}$$

Para determinar la constante, se aplica la condición de frontera correspondiente a la Ley de Ampère, en cualquiera de las superficies del toroide, por ejemplo, en $z = c$. Para ello es necesario suponer que no hay desbordamiento del campo fuera del toroide:

$$\overline{1z} \times \left[\overline{H}\Big|_{z=c^+} - \overline{H}\Big|_{z=c^-}\right] = \overline{K}\Big|_{z=c}$$

Sustituyendo:

$$\overline{1z} \times \left[\bar{0} - \overline{1\varphi}\frac{C_1}{\rho}\right] = -\overline{1\rho}\frac{NI_0}{2\pi\rho} \Rightarrow C_1 = -\frac{NI_0}{2\pi} \Rightarrow H_\varphi = -\frac{NI_0}{2\pi\rho}$$

Entonces, el campo magnético dentro del toroide es:

$$\overline{H}(\rho) = -\overline{1\varphi}\frac{NI_0}{2\pi\rho},\ \text{en } a < r < b,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < z < c$$